VARIACION DE LA ESCALA EN LAS PROYECCIONES GEOGRAFICAS Y EJEMPLO DE SU DETERMINACION EN LA PROYECCION DE MERCATOR.

Por: Alberto López Santoyo.

Para obtener en un plano la representación de la superficie terrestre, es necesario basarse en aquellos cuerpos geométricos que más se aproximan a la forma real de nuestro planeta y se han tomado para ello la esfera y el elipsoide de revolución. Cuando se considera a la Tierra como una esfera, se le llama esfera terrestre y cuando se le toma como un elipsoide de revolución se le llama esferoide, por ser muy pequeña la excentricidad. El esferoide se aproxima más que la esfera a la forma real de la Tierra.

Con el fin de obtener representaciones en un tamaño adecuado, se consideran estos cuerpos reducidos un determinado número de veces y se les llama entonces modelo terrestre.

La elaboración de un mapa se basa en la proyección de los paralelos y meridianos, ya que cualquier punto sobre la superficie de la Tierra está determinado por la intersección de un paralelo y un meridiano.

Las proyecciones geográficas son la representación plana de la red de paralelos y meridianos terrestres.

La escala es la relación que indica cuántas veces se han acortado las magnitudes lineales de la Tierra al trabajar con un modelo terrestre.

Hay dos clases de escala: escala numérica y escala gráfica.

La escala numérica es la relación ó cociente entre la longitud de una línea en la proyección y la longitud real de esa línea sobre la Tierra. Denotando por l y L respectivamente esas dos longitudes y por $\frac{1}{E}$ la escala numérica, se tendrá por definición:

$$1) \quad \frac{1}{E} = \frac{l}{L}$$

Con esta expresión se puede calcular cualquiera de los términos E, l, L, conociendo los otros dos.

La escala numérica es independiente del sistema de unidades que se emplee. Por ejemplo, la escala 1:100 000 indica que cualquier unidad de longitud sobre la proyección, equivale a 100 000 de esas mismas unidades sobre la Tierra.

Al número E se le llama denominador de la escala y por ser inverso de ésta, si el valor de E aumenta, la escala disminuye y si el valor de E decrece, el de la escala aumenta. Por ejemplo, la escala 1: 100 000 es menor que la escala 1: 50 000 pero mayor que la escala 1:250 000. Si el denominador de la escala tiende a infinito, la escala tiene por límite el valor cero y si E tiende al valor cero, $\frac{1}{E}$ tiene por límite el infinito.

La escala gráfica es un diagrama que representa esa relación entre magnitudes lineales en la proyección y las correspondientes sobre la Tierra. Esta clase de escala sí depende del sistema de unidades que se emplee. Por ejemplo, la siguiente escala gráfica indica que una longitud real de un kilómetro queda representada en la proyección por un centímetro.

0 1 2 3 4 Km.

Al trabajar con la escala en una proyección, se debe tomar en cuenta que sólo unas líneas del modelo terrestre y en ocasiones sólo una, quedan proyectadas en su verdadera magnitud. Todas las demás se proyectan con tamaño diferente al que les corresponde. La escala de la proyección, que está dada por la del modelo terrestre en el cual se basa, es válida únicamente en las líneas que no sufren alteración en su longitud al proyectarse.

Debido a que la superficie esférica y la del elipsoide no son desarrollables, no es posible proyectar la superficie del modelo terrestre sobre un plano, sin que se tengan deformaciones. Esto proviene de la desigual alteración que sufren en su longitud las líneas del modelo terrestre al proyectarse. A mayor diferencia de alteración en la longitud de dos líneas perpendiculares corresponde una mayor deformación.

La desigual alteración mencionada origina una variación de la escala dentro de una misma proyección.

Tomando una línea cualquiera del modelo terrestre en la proyección, el comportamiento de la escala queda concretado en los siguientes tres casos:

I. La escala de la línea es igual a la del modelo terrestre.

Este caso se presenta cuando la línea no sufre alteración en su longitud. Corresponde a la línea de contacto entre el modelo terrestre y el plano de proyección en las proyecciones cónicas y cilíndricas; en las proyecciones azimutales, cuando el plano de la línea en el modelo terrestre es paralelo al plano de proyección y las proyectantes son paralelas entre sí. Igual sucede cuando se modifica una proyección y se da a la línea la longitud que tiene en el modelo terrestre.

II. La escala de la línea es diferente de la del modelo terrestre.

En este caso la línea queda proyectada con una longitud diferente a la que tiene en el modelo terrestre, pero tomando sobre éste, segmentos iguales de ella, los segmentos correspondientes en la proyección son también iguales entre sí. Se presenta en las proyecciones cilíndricas y cónicas cuando el eje del cilindro ó del cono es perpendicular al plano de la línea en el modelo terrestre y en las proyecciones azimutales, cuando el mencionado plano es paralelo al plano de proyección y el foco se encuentra a una distancia finita de este último.

III. La escala varía de punto a punto sobre la misma línea.

En este caso queda proyectada con una longitud diferente a la que tiene en el modelo terrestre y tomando sobre éste, segmentos iguales de ella, los segmentos correspondientes en la proyección son diferentes entre sí. Corresponde en todos los sistemas de proyección a líneas cuyo plano en el modelo terrestre guardan cualquier posición y condiciones no consideradas en los dos casos anteriores.

Se ha visto en estros tres casos que la escala puede permanecer constante en una línea de la proyección (I y II) ó variar de punto a punto sobre ella (III).

Considerando ahora un punto cualquiera de la proyección y tomando diferentes direcciones a partir de él, en las líneas determinadas por esas direcciones habrá en general un diferente comportamiento de la escala; de aquí que el valor de ésta dependa de la dirección que se tome a partir del punto.

Por lo tanto, la escala debe considerarse sobre determinado punto y hacia determinada dirección.

Un elemento muy importante que facilita calcular el valor de la escala y permite también analizar su variación en toda la proyección, es el llamado factor de escala.

El factor de escala en un punto de la proyección se define como el cociente de la escala en ese punto, entre la escala del modelo terrestre, que es también la escala de la proyección.

Si se designa por $\frac{1}{E}$ la escala en ese punto; por $\frac{1}{E'}$ la escala del modelo terrestre y por F el factor de escala, se tendrá por definición:

$$F = \frac{\frac{1}{E}}{\frac{1}{E'}}$$

Simplificando:

$$2) \qquad F = \frac{E'}{E}$$

Si la escala es constante en una línea de la proyección y se designa por L' su longitud en el modelo terrestre; por l su longitud en la proyección y por L su longitud real sobre la Tierra, se tendrá, aplicando la expresión 1):

$$\frac{1}{E'} = \frac{L'}{L} \qquad y:$$

$$\frac{1}{E} = \frac{l}{L}$$

Despejando E' y E y sustituyendo en la expresión 2):

$$F = \frac{\frac{L}{l'}}{\frac{L}{l}}$$

Simplificando:

$$3) \qquad F = \frac{l}{l'}$$

Con esta expresión se puede calcular el factor de escala en las líneas de la proyección donde la escala es constante, aun cuando su valor difiera de una línea a otra y analizar la variación de la escala en la proyección.

VARIACION DE LA ESCALA EN LA PROYECCION DE MERCATOR.

La proyección de Mercator es una proyección cilíndrica modificada que tiene dos propiedades fundamentales:

a) Es una proyección conforme.

La principal propiedad de las proyecciones conformes es que no alteran el valor de los ángulos proyectados, por lo cual se conserva con bastante aproximación la forma de pequeñas superficies, ya que la variación de la escala es menor mientras más pequeña sea la superficie en que se considere. La condición analítica para obtener una proyección conforme es que el factor de escala sea igual en todas direcciones a partir de un punto cualquiera.

b) Es la única en que las líneas loxodrómicas ó líneas de rumbo constante, se proyectan como rectas.

Esta propiedad sólo se obtiene en una proyección conforme en la cual paralelos y meridianos queden proyectados por líneas rectas.

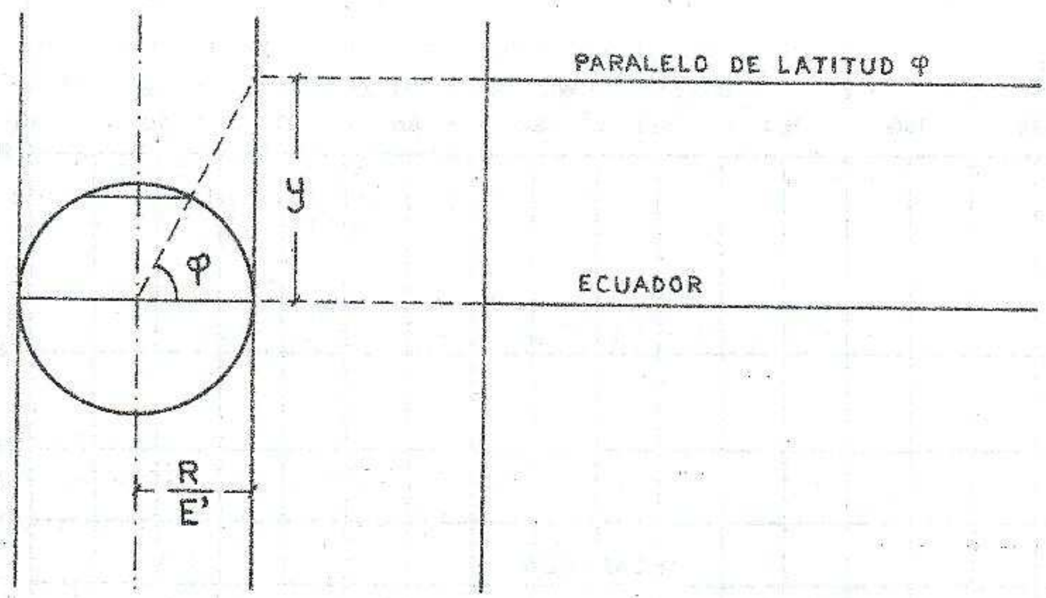
La proyección de Mercator deriva de la que se obtiene considerando un cilindro tangente a la esfera modelo en el ecuador y tomando el centro de la esfera como foco de la proyección.

Al desarrollar la superficie lateral del cilindro los paralelos quedan proyectados por rectas paralelas todas de igual longitud y espaciadas cada vez a mayor distancia en la dirección de los polos. Los meridianos quedan proyectados por rectas perpendiculares a los paralelos y conservan distancias iguales entre sí.

Si se designa por R el radio de la esfera terrestre; por $\frac{1}{E'}$

la escala de la esfera modelo y en la proyección por y la distancia al ecuador de un paralelo cualquiera de latitud φ se tiene:

$$4) \qquad y = \frac{R}{E'} \operatorname{tg} \varphi$$



Nótese que no se proyectan las zonas de alta latitud, pues el valor de y tiende a infinito cuando φ tiende a 90°.

Para obtener la proyección de Mercator basta modificar el espaciamiento de los paralelos, de manera que, del ecuador hacia los polos, los arcos de meridiano se amplifiquen exactamente en la medida que lo hacen los arcos de paralelo. Planteada esta condición la distancia y resulta, cuando se considera la esfera modelo:

$$5) \qquad y = \frac{R}{E'M} \log \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)$$

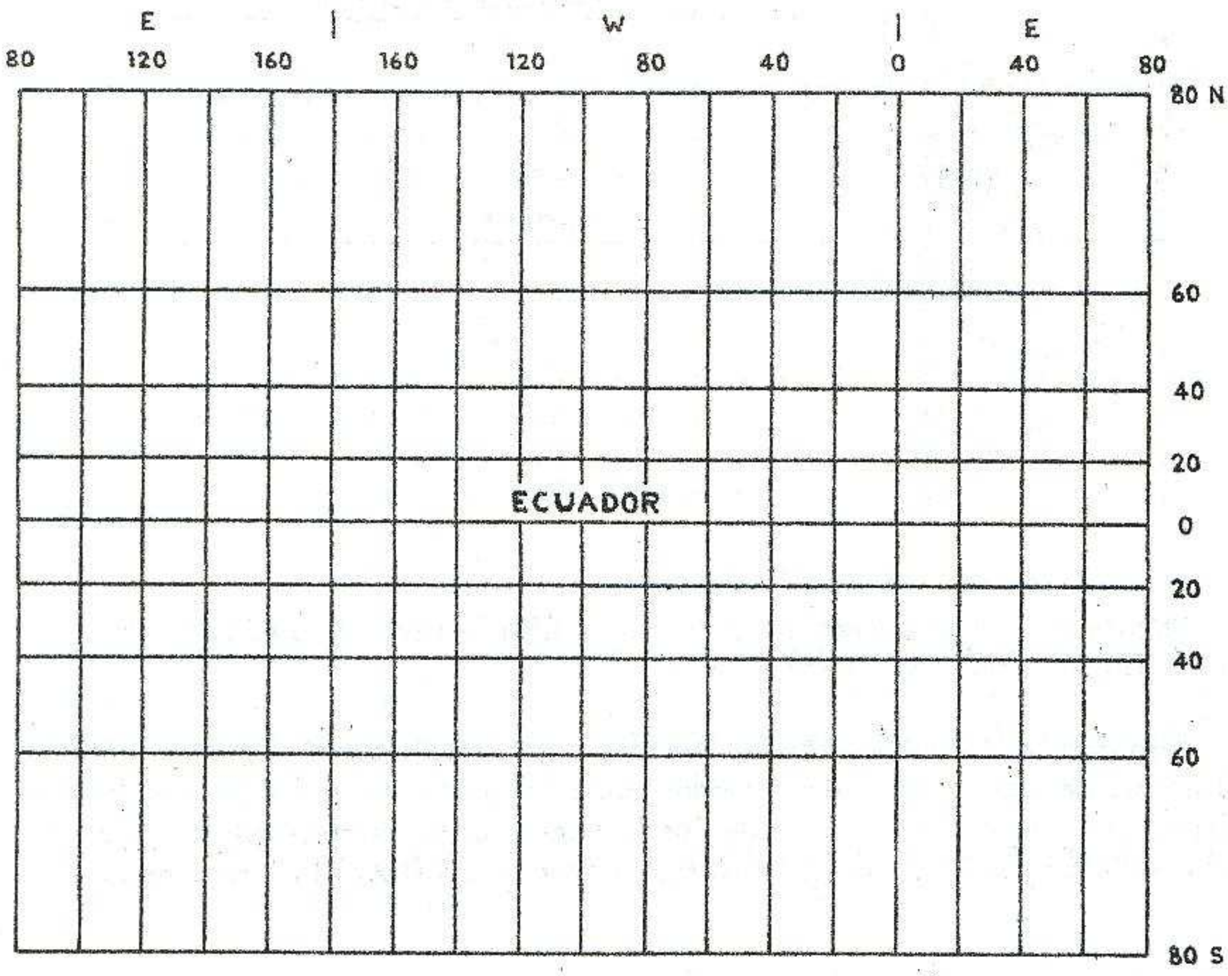
$\frac{1}{M} = 2.302\,59$ es la constante para transformar logaritmos de base 10 a logaritmos neperianos.

Considerando el esferoide modelo el valor de y resulta:

$$6) \qquad y = \frac{a}{E'M} \log \left[\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \left(\frac{1 - e \operatorname{sen} \varphi}{1 + e \operatorname{sen} \varphi} \right)^{\frac{e}{2}} \right]$$

a = 6 378 206.4 m. es el semieje mayor ó radio ecuatorial del esferoide; e = 0.082 271 es la excentricidad hasta la sexta cifra decimal (esferoide de Clark, 1866).

Si la escala de la proyección es muy pequeña, como la del ejemplo que a continuación se ilustra ,(1 : 300 000 000) la diferencia al considerar la esfera modelo y el esferoide modelo es practicamente nula.



Como todos los paralelos quedan proyectado por rectas de igual longitud que el ecuador ó de igual longitud que el paralelo base cuandó éste es la intersección entre el cilindro y el modelo terrestre, el valor de la escala difiere de un paralelo a otro, pero se conserva constante en cada uno de ellos. Sobre un meridiano la escala varía de punto a punto.

Por ser conforme la proyección, la escala es igual en todas las direcciones tomadas a partir de un punto cualquiera; de aquí que tenga el mismo valor en la dirección del paralelo que en la dirección del meridiano.

Por lo tanto la escala en cualquier punto está dada por la del paralelo y solo depende de la latitud.

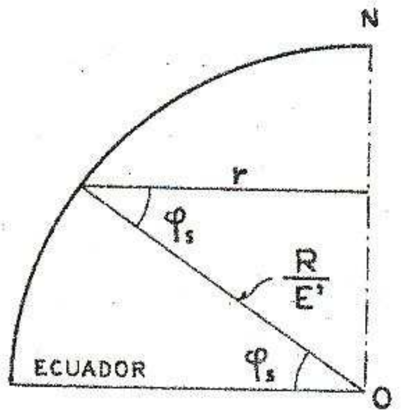
A continuación se calcula el factor de escala y el denominador de la escala sobre cualquier punto de la proyección, en los diferentes casos que se presentan según se apoye en una esfera ó en un esferoide modelos y tomando un paralelo base cualquiera cuya latitud se denota por φ_s ó tomando el ecuador como paralelo base.

I. Considerando la esfera modelo y un paralelo base:

Todos los paralelos se proyectan con una longitud igual a la del paralelo base. Designando por L dicha longitud, su valor será:

$$L = 2\pi \frac{R}{E'} \cos \varphi_s$$

ya que $\frac{R}{E'} \cos \varphi_s$ es el radio del paralelo base:



$$r = \frac{R}{E'} \cos \varphi_s$$

La longitud L' de un paralelo cualquiera de latitud φ tendrá por valor en la esfera modelo:

$$L' = 2\pi \frac{R}{E'} \cos \varphi$$

El factor de escala se encuentra aplicando la expresión 3):

$$F = \frac{2\pi \frac{R}{E'} \cos \varphi_s}{2\pi \frac{R}{E'} \cos \varphi}$$

Simplificando:

$$7) \qquad F = \frac{\cos \varphi_s}{\cos \varphi}$$

Para analizar facilmente la variación de la escala en toda la proyección, ya que el numerador es constante, el factor de escala puede expresarse en la forma siguiente:

$$F = \frac{K}{\cos \varphi} \qquad \text{Como} \quad \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi$$

$$\therefore \quad F = K \sec \varphi$$

El factor de escala tiene su valor mínimo igual a K en el ecuador, ya que la función secante entre 0^o y 90^o tiene su mínimo que es la unidad cuando el ángulo es 0^o. Si la latitud aumenta desde este valor, F crece en forma continua y su valor es la unidad cuando φ es igual a φ_s ; ésto es fácil de ver en la expresión 7). Al seguir aumentado la latitud, la función secante y por lo tanto el factor de escala crecen en forma continua teniendo por límite el infinito cuando φ tiende a 90^o.

Para calcular el denominador de la escala, basta despejar E de la expresión 2):

8) $$E = \frac{E'}{F}$$

y sustituir en ésta el valor de F dado por la expresión 7):

$$E = \frac{E'}{\frac{\cos \varphi_s}{\cos \varphi}}$$

9) $$E = E' \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_s}$$

II. Considerando la esfera modelo y el ecuador como paralelo base:

$$\varphi_s = 0^\circ$$

$$\therefore \cos \varphi_s = 1$$

El factor de escala y el denominador de la escala se encuentran sustituyendo este último valor en las expresiones 7) y 9):

10) $$F = \frac{1}{\cos \varphi}$$

11) $$E = E' \cos \varphi$$

III. Considerando el esferoide modelo y un paralelo base:

Si se designa por $\underline{a}$ el semieje mayor del esferoide modelo y por $\underline{e}$ su excentricidad, el radio $\underline{r}$ de un paralelo cualquiera de latitud φ tiene por valor:

$$12) \qquad r = \frac{a \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

Si r_s es el radio del paralelo base, el factor de escala en un paralelo cualquiera será, aplicando la expresión 3):

$$F = \frac{2\pi r_s}{2\pi r} = \frac{r_s}{r}$$

Tomando en cuenta el valor del radio dado por la expresión 12):

$$F = \frac{\dfrac{a \cos\varphi_s}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_s}}}{\dfrac{a \cos\varphi}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}}$$

Simplificando y ordenando:

$$13) \qquad F = \frac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_s}}$$

Para encontrar el denominador de la escala se sustituye esta última expresión en la 8):

$$E = \frac{E'}{\dfrac{\cos\varphi_s}{\cos\varphi}\sqrt{\dfrac{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_s}}}$$

Ordenando:

$$14) \qquad E = E' \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_s}\sqrt{\frac{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi_s}{1-e^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

IV. Considerando el esferoide modelo y el ecuador como paralelo base:

$$\varphi_s = 0^\circ$$

$$\operatorname{sen} \varphi_s = 0 \quad ; \quad \cos \varphi_s = 1$$

Sustituyendo estos dos valores en las expresiones 13) y (14) y simplificando:

$$15) \qquad F = \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$16) \qquad E = E' \frac{\cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

Aun cuando los valores de la escala difieren si la proyección se apoya en la esfera modelo ó en el esferoide modelo, la variación cuando se apoya en este último, resulta exactamente igual a la analizada en el caso de la esfera modelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

Charles H. Deetz, Oscar S. Adams. Elements of Map Projection. Special Publication No. 68, U. S. Coast and Geodetic Survey. Washington, 1921.

Pedro C. Sánchez y Octavio Bustamante . Apuntes sobre Cartografía. Publicación No. 10. Dirección de Estudios Geográficos y Climatológicos. Secretaría de Agricultura y Fomento. México, 1964. Reimpresión.

Erwin Raisz. General Cartography. Second Edition. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1948.

Arthur H. Robinson. Elements of Cartography. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1963.

Arthur H. Robinson. An Analytical Aproach to Map Projections. Annals of the Association of American Geographers, Vol. 39, 1949.